

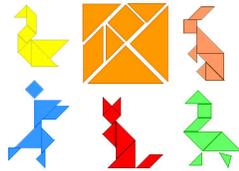
# IL PARADOSSO DI BANACH-TARSKI

ALESSANDRO BERARDUCCI

Queste note sono la rielaborazione di una presentazione tenuta a Pisa presso la Domus Galileana il 12 Dicembre 2008. L'occasione per rimetterci le mani mi è stata fornita da Giovanni Gaiffi, per un giornalino legato alle attività di orientamento del Dipartimento di Matematica di Pisa, e da Alessandro Andretta, per l'iniziativa "Alpha Class" dei Dipartimenti di Matematica del Politecnico di Torino e dell'Università di Torino. Gli argomenti possono essere approfonditi nello splendido libro di Tomkowicz e Wagon [1] e coinvolgono molte aree della matematica (gruppi, misure, ecc.).

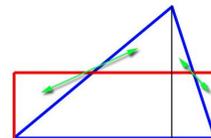
## 1. CONGRUENZE PER DISSEZIONI

Due figure nel piano sono **congruenti per dissezioni** se una delle due può essere decomposta in un numero finito di pezzi poligonali che possono essere ricomposti (senza alterarne forma e dimensioni) in modo da formare l'altra figura.



Si intende che i vari pezzi non possano avere sovrapposizioni al di fuori dei bordi. La caratteristica principale delle congruenze per dissezioni è che conservano le aree.

Possiamo ricavare la formula per l'area del triangolo (base per altezza diviso due) usando il fatto che un qualsiasi triangolo è congruente per dissezioni ad un rettangolo con la stessa base e un'altezza pari alla metà dell'altezza del triangolo.

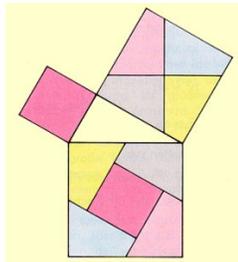


Analogamente si dimostra che ogni parallelogramma è congruente per dissezioni ad un rettangolo (basta tagliare un triangolo rettangolo da uno dei due lati e spostarlo sul lato opposto). Un po' più difficile è dimostrare che ogni rettangolo è congruente per dissezioni ad un quadrato, e componendo queste costruzioni si può in effetti dimostrare che ogni poligono è congruente per dissezioni ad un quadrato. Tutto ciò era in gran parte noto agli antichi greci, mentre una dimostrazione moderna del fatto che due poligoni sono congruenti per dissezioni se e solo se hanno la stessa area si basa sui lavori di Wallace, Bolyai e Gerwien all'inizio del XIX secolo.

## 2. IL TEOREMA DI PITAGORA

Il teorema di Pitagora afferma che, dato un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

Del teorema esistono molte dimostrazioni, di cui alcune basate sulle congruenze per dissezioni, come nella figura qui sotto.



La dimostrazione per dissezioni di Henry Perigal (1801-1898), agente di cambio e matematico dilettante.

Il quadrato grande costruito sull'ipotenusa può essere dissezionato in cinque pezzi, che poi possono essere ricomposti per formare i due quadrati costruiti sui cateti. Sapreste dire cosa occorre verificare per assicurarsi che la dimostrazione sia valida?

### 3. IL TRIANGOLO E L'ESAGONO REGOLARI

La dimostrazione del fatto che poligoni con la stessa area siano congruenti per dissezioni (Teorema di Bolyai-Gerwien) non fornisce stime sul numero minimo di pezzi necessari, tuttavia nei casi concreti ci si può divertire a cercare di minimizzare il numero dei pezzi. Ad esempio per trasformare un triangolo equilatero in un quadrato con la stessa area bastano 4 pezzi, e per un esagono regolare ne bastano 5, ma la suddivisione non è affatto facile da trovare (o anche solo da verificare dopo averla vista)!



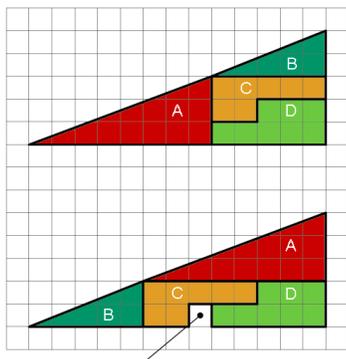
### 4. PROPRIETÀ DELLE CONGRUENZE PER DISSEZIONI

Come semplice esercizio vi propongo di verificare che le congruenze per dissezioni verificano la proprietà transitiva, ovvero se  $X$  è congruente per dissezioni a  $Y$  e  $Y$  è congruente per dissezioni a  $Z$ , allora  $X$  è congruente per dissezioni a  $Z$ . Ad esempio avendo visto che un triangolo equilatero ed un esagono regolari sono entrambi congruenti per dissezioni ad un quadrato, ne segue che un triangolo equilatero è congruente per dissezioni ad un esagono regolare. Sapreste trovare i pezzi necessari?

Molto più difficile è invece dimostrare che se da due figure congruenti dissezioni sottraiamo due figure anch'esse congruenti per dissezioni, le figure risultanti sono ancora congruenti per dissezioni. Ad esempio se all'interno di due triangoli uguali facciamo due buchi di forma quadrata e delle stesse dimensioni, ma non necessariamente posizionati nello stesso modo, le figure risultanti sono ancora congruenti per dissezioni. Questa proprietà sottrattiva può in molti casi semplificare le dimostrazioni che due figure hanno la stessa area.

## 5. TRUCCO O MAGIA?

Abbiamo detto che le congruenze per dissezioni conservano l'area, ma non abbiamo in effetti dato una definizione precisa di area. Sapendo però che un poligono è sempre congruente per dissezioni ad un rettangolo (o addirittura ad un quadrato), potremmo essere tentati di definire l'**area di un poligono** come il prodotto delle lunghezze dei lati di un rettangolo congruente per dissezioni al poligono dato. Per assicurarsi che ciò dia una buona definizione, occorrerebbe mostrare che il risultato non dipende da come si scelgono i pezzi della dissezione, e a tal fine sarebbe necessario far vedere che un poligono non può essere congruente per dissezioni ad un poligono più grande che lo contiene. In altre parole ci chiediamo se possa accadere che, attraverso un semplice spostamento di pezzi, si possa far "scompare" una porzione di una figura come in un gioco di prestigio. Ciò sembra intuitivamente impossibile, ma un famoso puzzle di Dudeney sembra a prima vista mettere in discussione questa certezza:

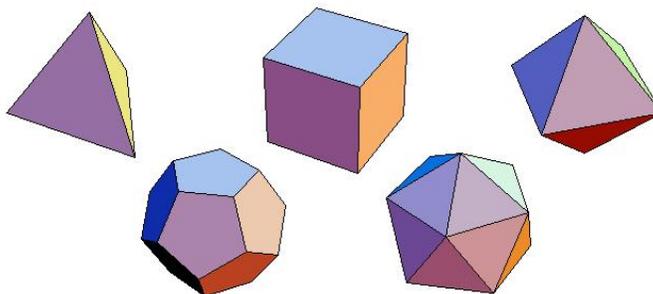


Un puzzle di Henry Ernest Dudeney,  
1857-1930

Se non conoscete il trucco, la figura può lasciare sconcertati in quanto sembra mettere in crisi il concetto stesso di area. C'è però un inganno e in effetti si dimostra che simili "sparizioni" non possono capitare. Sapreste trovare l'inganno?

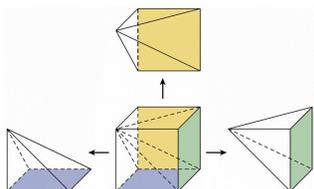
## 6. PASSIAMO ALLA TERZA DIMENSIONE: VOLUME DEI SOLIDI

Abbiamo visto che nel caso dei poligoni l'aver la stessa area equivale all'essere congruenti per dissezioni e sparizioni di pezzi come nel puzzle di Dudeney possono solo essere frutto di inganno. Vediamo ora cosa succede per il volume dei solidi nello spazio tridimensionale.



## 7. VOLUME DELLA PIRAMIDE

Esattamente come un quadrato può essere diviso in due triangoli rettangoli, un minimo di riflessione mostra come un cubo può essere diviso in tre piramidi rettangole uguali, come nella figura.

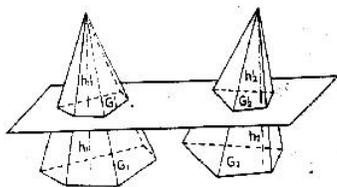


$$\begin{aligned} \text{Volume della piramide rettangola} \\ = \\ \text{base} \times \text{altezza} / 3 \end{aligned}$$

Ne deduciamo che, ammesso che esista una nozione sensata di volume, il volume della piramide rettangola deve essere dato dalla formula “Base  $\times$  Altezza / 3”, dove per “Base” intendiamo l’area del quadrato di base. In altre parole, se il lato è lungo 1 metro, il volume della piramide rettangola è 1/3 di metro cubo.

## 8. PRINCIPIO DI CAVALIERI

Se la piramide ha una forma diversa il ragionamento precedente non si applica. Tuttavia utilizzando il cosiddetto “principio di Cavalieri” possiamo determinare il volume di una piramide qualsiasi, non necessariamente rettangola o con base quadrata. Per illustrarne il funzionamento, consideriamo due piramidi solide, come nella figura, e poniamole su una stessa base orizzontale. Supponiamo che “affettando” le due piramidi con un piano parallelo alla base orizzontale si ottengano sempre due figure piane della stessa area. Il principio di Cavalieri afferma che in questo caso le due piramidi solide hanno lo stesso volume. Se le riempiamo di acqua, ne conterrebbero la stessa quantità.



Bonaventura Cavalieri, 1598-1647

Applicando il principio, si dimostra che il volume di una qualsiasi piramide è pari al volume di una piramide rettangola con la stessa area di base e la stessa altezza. Quindi il volume della piramide generica si calcola di nuovo con la formula Base  $\times$  Altezza / 3.

Per giustificare il principio di Cavalieri immaginiamo che le fettine, invece di essere infinitamente sottili, abbiano un certo spessore, molto piccolo rispetto alle dimensioni della piramide. Il volume di una fettina può allora essere approssimato abbastanza bene dall’area della sua base per la sua altezza. Dico “approssimato” anziché calcolato esattamente perché la formula “area di base per altezza” presuppone che i lati delle fettine siano verticali anziché obliqui, dimodoché l’unione delle fettine viene a formare una struttura a gradini tipo ziggurat. Tuttavia facendo fettine sempre più piccole e sommando i loro contributi, l’errore totale che si commette può essere reso arbitrariamente piccolo, come si può vedere approssimando

la piramide dall'interno e dall'esterno con due ziggurat, ottenendo al limite il volume della piramide. Su analoghe considerazioni si basa il principio di esaustione di Archimede, così come la moderna teoria dei volumi e degli integrali.

### 9. IL TERZO PROBLEMA DI HILBERT

Possiamo estendere dal piano allo spazio il concetto di congruenza per dissezioni, semplicemente richiedendo che i pezzi della scomposizione siano poliedrali anziché poligonali (e che non vi siano sovrapposizioni al di fuori dei bordi). Possiamo allora chiederci se due poliedri con lo stesso volume siano sempre congruenti per dissezioni. In contrasto con quanto avveniva per l'area dei poligoni, la risposta è però negativa: risolvendo uno dei famosi problemi posti da Hilbert nel 1900, Max Dehn ha infatti dimostrato la cosa seguente.

Un cubo e un tetraedro non sono mai congruenti per dissezioni, ovvero non è possibile suddividere un cubo in un numero finito di poliedri che possono essere ridisposti in modo da formare il tetraedro.



Max Dehn, 1878-1952

Per chi voglia approfondire, diciamo solo che la dimostrazione si basa sul fatto che se due poliedri  $X$  ed  $Y$  sono congruenti per dissezioni, allora detti  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  e  $\beta_1, \dots, \beta_r$  i rispettivi angoli diedrali (gli angoli tra due facce adiacenti), esistono numeri interi positivi  $m_1, \dots, m_s$  ed  $n_1, \dots, n_r$  rispettivamente, tali che la differenza tra  $m_1\alpha_1 + \dots + m_s\alpha_s$  e  $n_1\beta_1 + \dots + n_r\beta_r$  è un multiplo intero di  $\pi$  (vedi [2]). Nel caso del tetraedro e del cubo, gli angoli diedrali sono rispettivamente  $\alpha = \arccos(1/3)$  e  $\beta = \pi/2$ , e siccome  $\alpha/\beta$  si dimostra essere irrazionale, una tale relazione non può sussistere, onde la non congruenza per dissezioni.

### 10. IL PRINCIPIO DI CONTINUITÀ

Alla luce del risultato di Dehn, potrebbe sorgere il dubbio se esista un cubo dello stesso volume di un tetraedro. Una risposta positiva è però fornita dal principio di continuità: se teniamo fisso il tetraedro e ingrandiamo progressivamente un cubo inizialmente molto piccolo, dobbiamo necessariamente passare da cubi di volume decisamente inferiore a cubi di volume decisamente superiore a quello del tetraedro, e per continuità il volume dovrà passare per tutte le misure intermedie, assumendo anche esattamente quella del tetraedro.

### 11. EQUISCOMPOSIZIONI

Possiamo chiederci se il teorema di Dehn continui a valere rilassando la richiesta che i pezzi della dissezione siano poliedri e ammettendo quindi pezzi più complicati, come ad esempio quelli dei disegni di Escher (o meglio, l'equivalente in 3D).



Una suddivisione complicata del quadrato.

Per precisare le regole del gioco diamo alcune definizioni. Due figure geometriche sono **congruenti** se i punti dell'una corrispondono a quelli dell'altra tramite un'isometria, ovvero una corrispondenza che preserva le distanze. Nel caso di figure spaziali (ovvero in  $\mathbb{R}^3$ ), questo significa che le due figure sono uguali, salvo il fatto che sono situate in modo diverso nello spazio, possibilmente ruotate, traslate o capovolte l'una rispetto all'altra (incluso il caso in cui una delle figure sia come l'immagine allo specchio dell'altra).

Diciamo che due figure  $X$  ed  $Y$  sono **equiscomponibili**, se è possibile partizionare  $X$  ed  $Y$  nello stesso numero finito di pezzi in modo che ciascun pezzo di  $X$  sia congruente al corrispondente pezzo di  $Y$ .

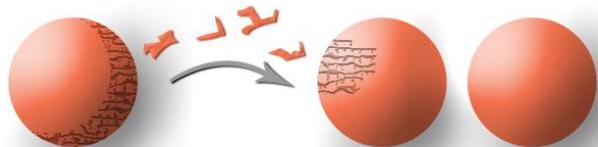
La differenza tra le equiscomposizioni e le congruenze per dissezioni è duplice: da un lato nelle equiscomposizioni si ammettono pezzi di forma arbitraria (non necessariamente poliedrali); dall'altro però si insiste sul fatto che i pezzi formino una partizione, ovvero siano del tutto disgiunti tra loro, non consentendo sovrapposizioni anche solo limitate ai bordi (che invece nelle congruenze per dissezioni erano trascurati).

Si può dimostrare che se  $X$  ed  $Y$  sono congruenti per dissezioni sono anche equiscomponibili (ovvero si possono eliminare le sovrapposizioni dei bordi, ma al prezzo di usare pezzi più complicati). La domanda è se le equiscomposizioni possano risultare uno strumento più flessibile per dimostrare l'uguaglianza di due volumi. Come vedremo nella prossima sezione, se non mettiamo limiti a quanto possano essere complicati i pezzi, le equiscomposizioni sono però talmente flessibili da risultare applicabili anche a figure con volume diverso!

## 12. TEOREMA DI BANACH-TARSKI

Il teorema di Banach-Tarski stabilisce che dati due solidi qualsiasi con parte interna non vuota, essi sono sempre equiscomponibili, ovvero è possibile partizionare il primo in un numero finito di pezzi che possono essere ricomposti in modo da formare il secondo.

In particolare, è possibile partizionare un solido sferico in 5 parti che possono essere ricomposte in modo da formare due sfere dello stesso volume della sfera data.



E' inoltre possibile, contro ogni ragionevole aspettativa, dividere un solido sferico della dimensione di una biglia, in un numero finito di pezzi che possono essere ricomposti per formare una sfera solida del diametro del sole!

In altre parole, mentre con le congruenze per dissezioni non ce la si fa anche quando ce la si dovrebbe fare (teorema di Dehn), con le equiscomposizioni, ce la si fa anche quando non ce la si dovrebbe fare (teorema di Banach-Tarski)!

I due risultati mostrano che il fatto di avere lo stesso volume non equivale né all'esistenza di una congruenza per dissezioni, né all'esistenza di una equiscomposizione. A differenza di altri paradossi, come quello di Zenone o quello del mentitore, destinati a rimanere interrogativi problematici, quello di Banach-Tarski è un vero

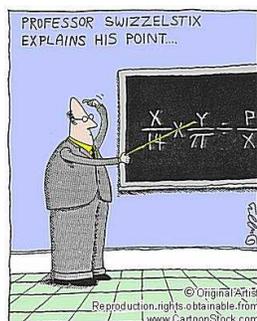
e proprio teorema matematico, nonostante sia così incredibile da essere chiamato paradosso.

### 13. COSA È IL VOLUME?

A questo punto occorrerebbe chiedersi quale sia la corretta definizione matematica di volume. Questo è un argomento importante che però non posso approfondire in queste note, limitandomi ad accennare al fatto che la definizione si basa sul concetto di approssimazione (limiti, integrali), come nella discussione relativa al principio di Cavalieri.

Il teorema di Banach-Tarski mostra in ogni caso che non è possibile assegnare in modo ragionevole un volume a tutte le figure spaziali: ai pezzi della equiscomposizione paradossale della sfera non è possibile assegnare un volume (essi non sono “Lebesgue-misurabili”), altrimenti otterremmo il risultato, questo sì paradossale, che una sfera solida ha lo stesso volume dell’unione di due sfere uguali alla prima.

### 14. PASSIAMO ALLA DIMOSTRAZIONE

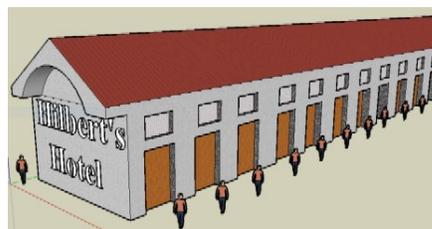


La seconda parte di questo intervento è più impegnativa e richiede una certa concentrazione, ma non vi scoraggiate, anche una lettura superficiale può dare i suoi frutti. La dimostrazione (a grandi linee) del teorema di Banach-Tarski sarà infatti l’occasione, o il pretesto, per introdurre informalmente qualche concetto importante della matematica, in particolare il concetto di gruppo. Per facilitare la lettura le sezioni sono monotematiche e solo alla fine sarà chiaro (almeno spero) come amalgamare i vari ingredienti.

Vedremo che i pezzi dell’equiscomposizione paradossale della sfera sono così complicati che non è possibile farsene una semplice immagine visiva, a differenza di quanto avveniva nel caso delle congruenze per dissezioni. Tuttavia l’esistenza concettuale dei vari pezzi riposa su principi che oggi sono comunemente accettati dai matematici, tra cui il cosiddetto “assioma della scelta” (servirà per scegliere un insieme di rappresentanti delle orbite di certe azioni gruppali). Se si trascurano i bordi, vi sono anche versioni del paradosso che non usano l’assioma della scelta (teorema di Dougherty e Foreman).

### 15. L’ALBERGO DI HILBERT

Uno dei più noti paradossi dell’infinito può essere illustrato dal cosiddetto “Albergo di Hilbert”. Esso ha infinite stanze, tante quante i numeri interi non negativi  $0, 1, 2, 3, \dots$ , e sono tutte occupate.

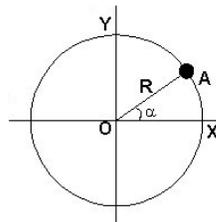


All’arrivo di un nuovo cliente l’albergatore riesce ad alloggiarlo con dei semplici spostamenti di stanza. Come fa? La risposta non è difficile: basta chiedere a ciascun

cliente di spostarsi nella stanza successiva (1 nel 2, 2 nel 3, 3 nel 4, eccetera), in modo che la stanza 0 si liberi e possa accogliere il nuovo cliente.

## 16. UN PRIMO PARADOSSO GEOMETRICO

Con la stessa idea dell'albergo di Hilbert possiamo dimostrare che un disco è equispartibile con il disco stesso privato di uno dei raggi. Più precisamente un disco è scomponibile in due pezzi  $R, S$  che possono essere ruotati in modo da formare lo stesso disco privato di un raggio (tenendo però il centro).



Si usa la tecnica dell'“albergo di Hilbert”. Scegliamo l'angolo  $\alpha$  in modo che  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \dots$  siano tutti distinti (basta scegliere  $\alpha$  in modo che  $\alpha/\pi$  sia irrazionale). Sia  $R$  l'insieme dei raggi che hanno coordinata angolare pari ad uno degli  $n\alpha$  ( $n$  intero positivo), e sia  $S$  la parte restante del disco. Ora risistemiamo i pezzi  $R, S$  come segue:  $S$  lo lasciamo fermo, mentre  $R$  lo ruotiamo di un angolo  $\alpha$ . In tal modo il raggio  $n\alpha$  si sposta in posizione  $(n+1)\alpha$  e il raggio di angolo  $\alpha$  sparisce.

Questo paradosso è meno sorprendente di quello di Banach-Tarski perché il disco meno un raggio ha la stessa area di tutto il disco, mentre nel paradosso di Banach-Tarski si riescono ad alterare i volumi. Tuttavia abbiamo fatto un primo passo.

## 17. IL CONCETTO DI GRUPPO

Uno dei concetti più importanti dell'algebra moderna è quello di gruppo. Tra gli esempi più importanti vi sono i gruppi di “movimenti”, ad esempio le mosse possibili su un cubo di Rubik. In un gruppo è sempre definita una composizione, che nel caso del cubo di Rubik significa effettuare due mosse una dopo l'altra, e un inverso, che nel nostro esempio corrisponde fare la mossa opposta che fa tornare dove eravamo.

Altri esempi di gruppi sono dati dalle isometrie del piano e dello spazio. Ricordiamo che le isometrie sono le trasformazioni che non alterano le distanze, e nel caso del piano includono le rotazioni intorno ad un punto, le traslazioni, e i ribaltamenti intorno ad un asse.

Se ci restringiamo ai movimenti che preservano certe figure o simmetrie otteniamo un sottogruppo, ovvero un insieme di movimenti incluso in quello di partenza stabile per composizione e inversi. Per familiarizzarci con la nozione analizziamo il sottogruppo dei movimenti del piano che conservano la tassellazione del piano raffigurata qui accanto



L'analisi delle simmetrie mostra che il sottogruppo include la rotazione  $\rho$  in senso antiorario di  $2\pi/3$  radianti (120 gradi) intorno al punto centrale, la rotazione di  $4\pi/3$  radianti (240 gradi) ottenuta applicando due volte  $\rho$  (denotata  $\rho\rho$ , o  $\rho^2$ ), il movimento nullo, denotato “1”, i ribaltamenti intorno agli assi di simmetria, ad

esempio il ribaltamento  $\beta$  rispetto alla retta di pendenza  $\pi/3$  passante per il centro, la traslazione in orizzontale  $\tau$ , che sposta ogni asse di simmetria non orizzontale in quello accanto a destra, e tutti i movimenti che si ottengono da questi e dai loro inversi componendoli tra loro.

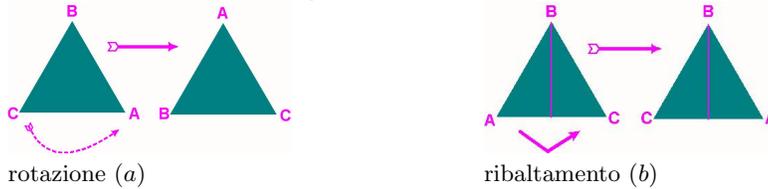
Seguiamo la convenzione (non del tutto standard) che i movimenti si leggano da sinistra a destra, ad esempio  $\beta\rho$  significa fare prima  $\beta$  poi  $\rho$ . Come esercizio potete verificare che  $\rho^3 = 1$  (ruotare di 360 gradi lascia tutti i punti del piano dove sono),  $\beta^2 = 1$ , e  $\beta\rho = \rho^2\beta$  (ribaltare e poi ruotare di 120 gradi equivale a ruotare di 240 gradi e poi ribaltare).

Dato un elemento  $x$  del gruppo, il suo inverso  $x^{-1}$  è quell'elemento tale che  $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$ . Ad esempio visto che  $\rho^3 = 1$  e che possiamo scrivere  $\rho^3 = \rho^2\rho$ , otteniamo  $\rho^{-1} = \rho^2$ , come si verifica anche direttamente osservando che ruotare di 240 gradi in senso antiorario ( $\rho^2$ ) equivale a ruotare di 120 gradi nel verso opposto ( $\rho^{-1}$ ).

Come esercizio potete verificare che componendo opportunamente  $\rho, \tau, \beta$  possiamo ottenere una traslazione lungo una direzione non orizzontale.

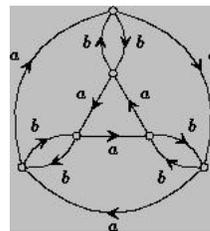
18. IL GRAFO DI CALEY DI UN GRUPPO

Dato un gruppo, il suo grafo di Caley rappresenta in modo visivo quali successioni di composizioni danno lo stesso risultato. Per semplicità consideriamo il gruppo D3 delle simmetrie del triangolo, che può essere generato da una rotazione  $a$  e un ribaltamento  $b$ , come in figura.



Si tratta di un gruppo simile a quello visto in precedenza salvo che non sono presenti le traslazioni in quanto il centro del triangolo deve rimanere fermo.

Nel gruppo D3 vi sono strade diverse che portano allo stesso risultato. Ad esempio  $a^3 = 1$ ,  $b^2 = 1$ ,  $ba = a^2b$ . Queste relazioni sono rappresentate nel grafo di Caley da cammini diversi ma con gli stessi nodi di partenza e arrivo.



Grafo di Caley di D3

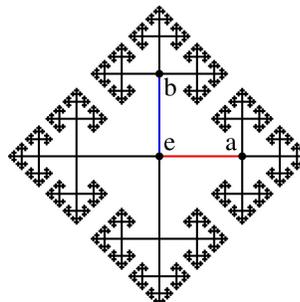
Possiamo pensare ai sei nodi del grafo come alle sei possibili posizioni ABC, CAB, BCA, CBA, BAC, ACB del triangolo (avrei dovuto etichettare i nodi), mentre le frecce rappresentano i movimenti. Come si vede dal diagramma fare tre volte  $a$  a partire da qualsiasi posizione riporta alla posizione di partenza.

19. GRUPPI LIBERI

Un gruppo generato da certi elementi  $a, b, \dots$  si dice **libero** se nel corrispondente grafo di Caley strade diverse con lo stesso punto di partenza portano a risultati diversi (per evitare banalità si escludono i casi in cui nella successione di mosse sia

presente un generatore affiancato al suo inverso). Il gruppo  $D3$  non è quindi libero in quanto ad esempio  $ba = a^2b$ . In un gruppo libero con due generatori  $a, b$  il grafo di Cayley dovrebbe avere la seguente forma.

Grafo di Cayley del gruppo libero  $F_2$  con due generatori  $a, b$ .



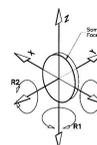
La mossa  $a$  fa andare a destra,  $a^{-1}$  a sinistra,  $b$  in alto,  $b^{-1}$  in basso. Strade diverse a partire dal centro  $e$ , come ad esempio  $b$  e  $aba^{-1}$ , portano a nodi diversi.

Si dimostra che due isometrie nel piano non possono mai generare un gruppo libero (questo dipende dal fatto che il gruppo delle isometrie del piano è “risolvibile”), ma esistono invece due rotazioni  $a, b$  nello spazio tali che il gruppo da loro generato è libero, e questo si rivelerà decisivo per il teorema di Banach-Tarski.

## 20. GRUPPI DI MOVIMENTI NELLO SPAZIO

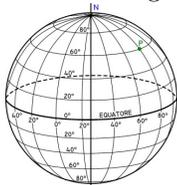
Concentriamoci sulle isometrie dello spazio che fissano l’origine delle coordinate, escludendo quindi le traslazioni. Tali movimenti portano una sfera centrata nell’origine in se stessa. Si dimostra che ogni tale movimento ha lo stesso effetto di una rotazione intorno ad un asse che passa per l’origine. In particolare, comunque muoviamo una sfera, lasciandone fisso il centro, esisteranno due punti sulla superficie sferica che alla fine saranno nella stessa posizione di dove erano all’inizio, ovvero i due punti antipodali dove l’asse di rotazione incontra la superficie.

Il gruppo delle isometrie dello spazio coincide dunque con il gruppo delle rotazioni della sfera in se stessa e si chiama  $SO(3, \mathbb{R})$ . La sfera viene denotata con il simbolo  $S^2$  e diremo che il gruppo “agisce” sulla sfera.



## 21. ORBITA DI UN PUNTO

Dato un punto  $P$  in uno spazio e un gruppo  $G$  che agisce sullo spazio, l’orbita di  $P$  consiste dell’insieme dei punti dove può arrivare  $P$  per effetto di uno degli elementi del gruppo.



Consideriamo ad esempio il sottogruppo  $G$  di  $SO(3, \mathbb{R})$  dato dalle rotazioni di un angolo arbitrario intorno all’asse  $z$ . Dato un punto  $P$  sulla sfera diverso da uno dei due poli, la sua orbita è allora il parallelo che passa per  $P$ , mentre l’orbita di ciascuno dei due poli si riduce ad un solo punto.

Un insieme **trasversale** (rispetto alle orbite) è un insieme che contiene uno ed un solo punto per ogni orbita. Nel nostro esempio un possibile insieme trasversale è dato da un qualsiasi meridiano  $M$ . Se scegliamo un sottogruppo più complicato di  $SO(3, \mathbb{R})$  trovare un insieme trasversale può richiedere l’assioma della scelta.

22. ROTAZIONI INDIPENDENTI

Consideriamo due rotazioni  $a, b$  di pari ampiezza  $\theta = \arccos(1/3)$  intorno agli assi  $z$  ed  $x$  rispettivamente. Per chi conosca le matrici, si tratta delle rotazioni rappresentate dalle matrici seguenti

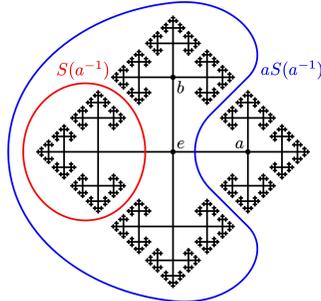
$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ +\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & +\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ai nostri fini, l'unica cosa da sapere è che le rotazioni  $a, b$  generano un gruppo libero  $F_{a,b}$  isomorfo ad  $F_2$ , ovvero il suo grafo di Cayley è identico a quello di  $F_2$  visto nella Sezione 19.

Ogni elemento  $g$  di  $F_{a,b}$  è una rotazione intorno ad un certo asse, vi saranno sulla sfera due punti "eccezionali" dati dall'intersezione dell'asse di rotazione di  $g$  con la superficie sferica. Consideriamo l'insieme  $D$  di tutti i punti eccezionali al variare di  $g$  in  $F_{a,b}$ . Ora scegliamo un punto  $P$  sulla sfera che non appartenga a  $D$  (visto che  $D$  è numerabile, basta scegliere un punto a caso e con probabilità  $1 = 100\%$  non apparterrà a  $D$ ). L'orbita di  $P$  rispetto a  $F_{a,b}$  sarà un insieme  $O_P$  di punti della sfera in corrispondenza biunivoca con i nodi del grafo di Cayley di  $F_2$ , ovvero  $P$  verrà mosso in punti diversi da ogni diversa successione delle rotazioni  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  (si escludono le successioni contenenti un generatore e un suo inverso affiancati).

23. SCOMPOSIZIONI PARADOSSALI DI UN'ORBITA

Chiamiamo  $O_P(a)$  l'insieme dei punti dell'orbita  $O_P$  che si ottengono applicando a  $P$  una composizione di elementi di  $F_{a,b}$  che "inizia" per  $a$ , ad esempio la successione di rotazioni  $abb$ . Definiamo similmente  $O_P(a^{-1}), O_P(b), O_P(b^{-1})$ . Questa divisione si fa al netto delle cancellazioni, ad esempio  $a^{-1}abab$  appartiene a  $O_P(b)$  perché la  $a$  iniziale si cancella con  $a^{-1}$  e resta  $bab$ .



L'orbita  $O_P$  si lascia scrivere come unione disgiunta dei cinque sottoinsiemi  $\{P\}, O_P(a), O_P(a^{-1}), O_P(b), O_P(b^{-1})$  corrispondenti rispettivamente al centro e ai quattro "petali" del diagramma di Cayley "centrato in  $P$ ".

L'osservazione fondamentale è che  $O_P$  si lascia anche scrivere come unione di  $O_P(a)$  e  $aO_P(a^{-1})$  ( $O_P(a^{-1})$  ruotato tramite  $a$ ), oppure come unione di  $O_P(b)$  ed  $bO_P(b^{-1})$ . In tal modo otteniamo una decomposizione "paradossale" dell'orbita  $O_P$ . Ciascuno dei due sottoinsiemi disgiunti  $A = O_P(a) \cup O_P(a^{-1})$  e  $B = O_P(b) \cup O_P(b^{-1})$  è equiscomponibile con l'intera orbita  $O_P$ .

## 24. TEOREMA DI HAUSDORFF

Se scegliamo un insieme  $M$  trasversale a tutte le orbite (qui serve l'assioma della scelta) e ripetiamo il ragionamento precedente simultaneamente per tutte le orbite dei vari punti di  $M$ , otteniamo una equiscomposizione paradossale di  $S^2 - D$ , dove  $S^2$  è la superficie sferica e  $D$  è l'insieme dei punti dove  $S^2$  incontra gli assi delle rotazioni corrispondenti agli elementi di  $F_{a,b}$  (vedi Sezione 22).



Felix Hausdorff,  
1868-1942

## 25. TEOREMA DI BANACH-SCHRÖDER-BERNSTEIN

Per passare dalla equiscomposizione paradossale di  $S^2 - D$  a quella di  $S^2$  e poi a quella di una sfera solida, conviene introdurre qualche notazione. Scriviamo  $X \sim Y$  se  $X$  ed  $Y$  sono equiscomponibili, ovvero se è possibile partizionare  $X$  ed  $Y$  nello stesso numero finito di pezzi in modo che ciascun pezzo di  $X$  sia congruente al corrispondente pezzo di  $Y$ . Scriviamo infine  $X \preceq Y$  se  $X$  è equiscomponibile con un sottoinsieme di  $Y$ .



Stephan Banach  
1892-1945

Il teorema di Banach-Schröder-Bernstein permette di semplificare notevolmente il compito di verificare che due figure sono equiscomponibili. Esso afferma che se  $X \preceq Y$  e  $Y \preceq X$  allora  $X \sim Y$ , analogamente al fatto che la congiunzione di due disuguaglianze fornisce una uguaglianza. La dimostrazione non è difficile e si può trovare in [1].

Una figura geometrica  $X$  si dice **paradossale** se esistono due sottoinsiemi disgiunti  $A, B$  di  $X$  tale che  $X \sim A \sim B$ . Utilizzando queste notazioni, il teorema di Hausdorff dice dunque che  $S^2 - D$  è paradossale, ovvero è possibile dividere  $S^2 - D$  in due pezzi  $A$  e  $B$  da ciascuno dei quali possiamo ricostruire  $S^2 - D$  tramite delle equiscomposizioni.

## 26. TEOREMA DI BANACH-TARSKI

Per ottenere una decomposizione paradossale di tutto  $S^2$  basta mostrare che  $(S^2 - D) \sim S^2$ . Si utilizza a tal fine la tecnica dell'albergo di Hilbert per riassorbire  $D$  tramite un'opportuna rotazione  $\rho$  intorno ad un asse passante per il centro della sfera tale che  $D, \rho(D), \rho^2(D), \rho^3(D), \dots$  siano tutti disgiunti.

Dalla paradossalità di  $S^2$  si ottiene infine facilmente la paradossalità della sfera solida meno il centro (basta aggiungere i raggi). La paradossalità dell'intera sfera solida si ottiene riassorbendo il centro con una rotazione non periodica per un asse non passante per il centro medesimo.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Grzegorz Tomkowicz and Stan Wagon. The Banach-Tarski Paradox. Cambridge University Press. Seconda edizione, 2016.
- [2] David Benko. A new approach to Hilbert's third problem. The American Mathematical Monthly. Vol. 114, No. 8 (Oct., 2007), pp. 665-676